Algebra III - Abstraktna algebra, 21.06.2016.

1. Množica $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ tvori grupo glede na operacijo seštevanja.

(a) Napiši Cayley-evo tabelo grupe G.

(b) Za vse podgrupe reda 4 v grupi G napiši vse njihove generatorje.

(c) Poišči vse leve odseke podgrupe $H = \langle(1,1)\rangle$ v grupi G.

Re.

(a)

$+$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,0)$	$(3,1)$	$(3,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,0)$	$(3,1)$	$(3,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$
$(2,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(2,1)$	$(2,1)$	$(2,0)$	$(3,1)$	$(3,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(3,0)$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$(3,1)$	$(3,1)$	$(3,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,0)$

(b) $\langle(1,0)\rangle = \langle(3,0)\rangle = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\}$, $\langle(1,1)\rangle = \langle(3,1)\rangle = \{(0,0),(1,1),(2,0),(3,1)\}$, $\langle(0,1),(2,0)\rangle = \langle(0,1),(2,1)\rangle = \{(0,0),(0,1),(2,0),(2,1)\}$.

(c) $H = \{(0,0),(1,1),(2,0),(3,1)\}$, $(0,1) + H = \{(0,1),(1,0),(2,1),(3,0)\}$.

□

2. Naj bosta $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ in $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Napiši α, β in $\alpha\beta$ kot produkt 2-ciklov (kot produkt transpozicij).

(b) Določi red permutacij α in β.

(c) Določi α^{-3}.

Re.

(a) $\alpha = (12)(45)$, $\beta = (12)(13)(15)(16)$, $\alpha\beta = (13)(15)(14)(16)$.

(b) $\alpha^2 = id$, $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 5$.

(c) $\alpha^{-3} = (12)(45)$.

□

3. Naj bo $U(10) = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 10,\ \gcd(k,10) = 1\}$. Vemo, da je $U(10)$ grupa za množenje po modulu 10.

(a) Določi vse edinke grupe $U(10)$.

(b) Izračunaj center grupe $U(10)$.

(c) Določi vse homomorfizme iz grupe $U(10)$ v grupo $(\mathbb{Z}_8, +)$.

Re.

(a) $\{1\}$, $\{1,9\}$ in $U(10)$.

(b) $Z(U(10)) = U(10)$.

(c) Obstajajo 4 homomorfizma. $\phi : U(10) \longrightarrow \mathbb{Z}_8$, $\phi(3^k) = ka$, kje je $a \in \{0,2,4,6\}$.

□

4. Za vsako od naslednjih delovanj grupe G na množici X, opiši orbito in stabilizator danega elementa $x \in X$.

(a) $X =$ kvadrat, $G = \mathrm{Sym}(X)$ in $x =$ ogljišče kvadrata.

(b) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $G = A_4$ in $x = 4$.

(c) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ in $x = (1, 2)^\top$.

Re.

(a) $X = \square ABCD$, $G = D_4$, $Gx = \{A, B, C, D\}$, $G_x = \{R_0, D'\}$.

(b) $Gx = \{1, 2, 3, 4\} = X$, $G_x = \{id, (123), (132)\}$.

(c) $Gx = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)^\top\}$, $G_x = \left\{ \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2}(1-t) \\ 2-2s & s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R},\ s + t - 1 \neq 0 \right\}$.

$\square$

Naloge so povzeti z `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`